

Hausarbeit zum Proseminar I

Magische Quadrate

von Yvonne Schulmeier und Joana Pesch

	Seite
1. Einleitung	
.....	1
2. Geschichte der magischen Quadrate	
.....	1
3. Konstruktion magischer Quadrate	
.....	3

1. Einleitung

Was sind magische Quadrate?

Magische Quadrate sind zunächst einmal ganz normale Zahlenquadrate. Bei näherem Betrachten aber kann man eine ganz besondere Eigenschaft an ihnen entdecken: Auf ihren Feldern sind die Zahlen so verteilt, dass die Summen jeder Spalte und jeder Zeile und auch der beiden Diagonalen immer den gleichen Wert haben. Diese Summe bezeichnet man als Konstante oder magische Zahl. Aus der Anzahl der Felder einer Reihe oder Spalte wird die Ordnung des magischen Quadrats bestimmt. Ein magisches Quadrat dritter Ordnung hat also z.B. drei Felder in jeder Reihe, eines vierter Ordnung hat dann insgesamt 16 Felder, d.h. vier Felder in jeder Reihe, da es eine 4x4-Matrix ist. Man unterscheidet zwischen „reinen“ magischen Quadraten und „unreinen“. In den Feldern von „reinen“ magischen Quadraten tauchen nur die Zahlen von 1 bis n^2 vor, wobei n die Ordnung des Quadrats ist. Dabei muss erwähnt werden, dass jede Zahl nur einmal verwendet wird. Die „unreinen“ magischen Quadrate beinhalten dagegen Zahlen von beliebiger Größe, sie können z.B. außerhalb des „reinen“ Bereichs liegen, negativ sein oder doppelt vorkommen.

2. Geschichte der magischen Quadrate

Magische Quadrate haben eine sehr weit zurückreichende Geschichte. Frühe Kulturen sprachen den besonderen arithmetischen Eigenschaften dieser Zahlenkonstruktionen magische Kräfte zu. Selbst heute noch wollen einige eine Wirkung von magischen Quadraten in der Astrologie sehen. Darauf soll aber hier nicht näher eingegangen werden.

Das erste uns überlieferte magische Quadrat stammt aus dem alten China. Seine Entdeckung soll durch den Kaiser Yu erfolgt sein, ein weiser Herrscher, der 2205 bis 2198 v. Chr. regierte. Er war damit beschäftigt, Dämme zu bauen, um die Überschwemmung des gelben Flusses zu begrenzen. Während einer Bootsfahrt soll ihm die göttliche Schildkröte Hi begegnet sein, auf deren Rücken ihm eine Zahlenzeichnung erschien: das erste magische Quadrat, genannt „Lo Shu“. Es ist ein Quadrat mit neun Feldern, d.h. dritter Ordnung und hat die magische Summe $S_3=15$.

In der chinesischen Mythologie spielten magische Quadrate eine große Rolle, denn ihnen wurden über viele Jahrhunderte hinweg positive magische Kräfte zugeschrieben. In Europa zehrte man lange von den Schriften eines gewissen Manuel Moschopoulos, der Anfang des 15. Jahrhunderts in Konstantinopel lebte. Er entwickelte Konstruktionsregeln für magische Quadrate beliebiger Ordnung. Cornelius Agrippa von Nettesheim (1486 bis 1535) konstruierte dann, auf die Schriften von Moschopoulos bauend, magische Quadrate der Ordnung 3 bis 9, bracht sie in Beziehung mit den Planeten Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus, Merkur und Mond und leitete daraus magische Eigenschaften der Planeten und der Quadrate her.

Auch lassen sich in Zusammenhang mit den magischen Quadraten, welche nur aus Zahlen bestehen, quadratische Aufschreibungen von magischen Sprüchen bringen, wie z.B. die seit der Antike bekannte Sator-Formel. Solche Quadrate dienten als Talisman gegen Krankheiten und andere böse Dinge, wie zum Beispiel Brände. Bis ins 18. Jahrhundert gab es mehrere Anordnungen, Teller mit dieser Sator-Formel im Haus zu haben, um sie, falls nötig, in brennende Gebäude zu werfen.

Einer, der sich besonders gerne mit magischen Quadraten beschäftigte, war Benjamin Franklin (17.01.1706 bis 17.04.1790). Erst in seiner Jugend und dann nach einer Pause kehrte er wieder im gesetzteren Alter zu ihnen zurück und veröffentlichte einige Quadrate mit besonderen Eigenschaften. Auch Leonhard Euler (15.04.1707 bis 18.09.1783) befasste sich mit magischen Quadraten, vor allem mit den griechisch-lateinischen.

In Indien brachte man magische Quadrate an Tempelwände an. Ein besonderes wird dort zum ersten Mal 1100 n. Chr. gefunden. Es ist ein magisches Quadrat vierter Ordnung mit der Summe $S_4=34$.

Sehr berühmt geworden ist auch das magische Quadrat vierter Ordnung auf Albrecht Dürers (1471-1528) Holzschnitt „Melancholia“. Dieses Quadrat stammt aber nicht, wie man

vermuten sollte, von ihm, sondern ein Quadrat, welches zum ersten Mal in Indien auftauchte und ein verwandtes des bereits erwähnten indischen Quadrates ist, diente ihm als Vorbild. Dürer hat es lediglich an seinem Mittelpunkt gespiegelt und dann in sein Werk eingebaut. In der untersten Zeile enthalten die beiden mittleren Felder die Zahlen 15 und 14, die zusammengelesen das Entstehungsjahr des Holzschnittes angeben.

Immer wieder tauchen in der Geschichte magische Quadrate auf. Viele verschiedene Menschen beschäftigten sich mit der Konstruktion verschiedenster Arten von magischen Quadraten. Es gibt unzählige Bücher von Gelehrten, die das Geheimnis der magischen Quadrate untersucht haben. Sogar in der literarischen Welt, die ja ansonsten nicht viel mit der Mathematik zu schaffen hat, begegnen wir einem magischen Quadrat: das so genannte „Hexeneinmaleins“ in Goethes „Faust“. Ein Lösungsvorschlag für dieses Quadrat sei hier gezeigt:

Du musst versteh'n, aus Eins mach Zehn.
Die Zwei lass gehen.
Die Drei mach gleich,
(d.h. in der ersten Zeile stehen die 10, 2 und 3)

So bist du reich.
(D.h. wir sind reich an Wissen. Wir wissen nämlich, dass die Summe des Quadrats 15 ist)

Verlier die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex,
Mach Sieben und Acht,
(d.h. in die zweite Zeile kommt 0, 7 und 8; S=15)

So ist's vollbracht:
(Es ist erst fast vollbracht, aber wir haben alles um die letzte Zeile zu erstellen. Die „verlorene“ 4 taucht wider auf, es ergibt sich 5, 6 und 4; S=15)

Und Neun ist Eins,
(Die neun Felder ergeben ein magisches Quadrat)

Und Zehn ist keins.
(Es gibt keine magischen Quadrate mit zehn Feldern)

Das ist das Hexeneinmaleins!

Auch heute werden im nahen Osten noch magische Quadrate aufgrund ihrer vermeintlich magischen Wirkung verwendet. Bei uns ist dieser Glaube nicht so weit verbreitet. Magische Quadrate stellen für uns eher schöne Spielereien dar.

3. Konstruktion magischer Quadrate

1. Allgemeines zu magischen Quadraten

Reine magische Quadrate der Ordnung n haben die Anordnung von n^2 verschiedenen Zahlen.

Die Addition jedes einzelnen Wertes einer Spalte, Zeile oder Hauptdiagonalen ergibt den festen Wert s , welchen man auch die magische Summe nennt.

Wenn man jede einzelne Zahl des Quadrates mit einem festen Wert multipliziert, oder eine feste Wert auf jede einzelne Zahl addiert entsteht ein neues magisches Quadrat.

Beispiele:

$$\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{array} * 2 = \begin{array}{ccc} 12 & 2 & 16 \\ 14 & 10 & 9 \\ 4 & 18 & 8 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{array} + 2 = \begin{array}{ccc} 8 & 3 & 10 \\ 9 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & 6 \end{array}$$

Wobei sich bei der Multiplikation die magische Summe um $s * c$ (c = Wert mit dem man das magische Quadrat multipliziert) ändert.

Bei der Addition um $s + (n * d)$ (d = Wert der addiert wird) .

Wenn man ein magisches Quadrat spiegelt (z.B. an einer der Hauptdiagonalen) oder um 90° dreht, erhält man neue magische Quadrate die sich jedoch nicht wesentlich vom ursprünglichen Quadrat unterscheiden.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{array} = \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(gespiegelt an} \\ \text{der Haupt-} \\ \text{diagonalen von} \\ \text{rechts} \\ \text{oben nach links} \\ \text{unten)} \end{array}$$

1.1 Formeln

Die Formel von Carl Friedrich Gauß zur Berechnung der Summe von Zahlen von $1, \dots, m$ lässt sich auch zur Berechnung der magischen Summe verwenden.

$$\sum_{k=0}^m m = (m * (m+1)) / 2$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$m = 1 \quad 1 = (1 * (2)) / 2 \quad 1 = 1$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} m = m+1 & \quad ((m+1) * (m+2)) / 2 = (m * (m+1)) / 2 + (m+1) \\ & = (m^2 + 3m + 2) / 2 = ((m^2 + m) / 2) + ((2m + 2) / 2) \\ & = (m^2 + 3m + 2) / 2 = (m^2 + 3m + 2) / 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit dieser Formel bewiesen.

Da man bei magischen Quadraten die Summe aller Zahlen betrachtet, und in einem reinen magischen Quadrat der Ordnung n alle Zahlen von $1, \dots, n^2$ vorhanden sind, muss man in die Formel den festen Wert n^2 einsetzen, der jedoch in jedem Quadrat von der Ordnung abhängt.

Bei einem magischen Quadrat der Ordnung $n = 3$ sind alle Zahlen von $1, 2, \dots, 8, 9$ vorhanden.

Die Summe ist somit $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$

Wenn man in die Formel nun $m = 9$ einsetzt, muss 45 das Ergebnis sein.

$$(9 * (9+1)) / 2 = 45$$

Somit kann man die Summe aller Zahlen im magischen Quadrat berechnen, jedoch noch nicht die magische Summe.

Da sich unsere Summe gleichmäßig auf n -Reihen (-Spalten) aufteilt, muss man die Summe nur noch durch n teilen.

$$(m * (m+1)) / 2 / n$$

Da man zur Summenberechnung eines magischen Quadrates immer n^2 verwendet, setzen wir nun direkt n alle Formeln für $m = n^2$ ein.

$$(n^2 * (n^2 + 1)) / 2 / n = (n^3 + n) / 2$$

In jedem magischen Quadrat mit ungeradem n gibt es eine Mittelzahl die sich wie folgt berechnen lässt :

$$(n^2 + 1) / 2$$

Was daraus folgt, dass es in einem reinen magischen Quadrat immer ein Zahlenpaar gibt welches sich zu $(n+1)$ addiert. Diese Eigenschaft wird auch „komplementär zueinander“ betrachtet.

Die Mittelzahl hat jedoch keinen zugeordneten komplementären Partner, deshalb nimmt sie den Wert $(n^2 + 1) / 2$ an.

Dies geht auch aus der Überlegung hervor die Formel der magischen Summe umzuschreiben:

Die Addition des Mittelwertes und den komplementären Zahlenpaaren müsste wieder die magische Summe ergeben.

Das heißt wir haben bei magischen Quadraten der Ordnung 5 zwei komplementäre Zahlenpaare, bei $n = 7$ drei usw. Daraus folgt das man immer $(n - 1) / 2$ komplementäre Zahlenpaare hat. Da ein komplementäres Zahlenpaar immer $(n^2 + 1)$ ergibt muss man die mit der Anzahl der Paare multiplizieren.

Beweis:

$$\begin{aligned} & ((n - 1) / 2) * (n^2 + 1) + ((n^2 + 1) / 2) \\ &= (n^3 + n - n^2 - 1 + n^2) / 2 \\ &= (n^3 + n) / 2 \quad \Rightarrow \text{Formel zur Berechnung der magischen Summe} \end{aligned}$$

Somit können wir annehmen, dass die Formel zur Berechnung des Mittelwertes stimmt.

1.2 Ausnahme magische Quadrate mit $n = 2$

Man kann in einem magischen Quadrat der Ordnung $n = 2$ die Zahlen so anordnen, dass die Zeilen, Spalten oder Hauptdiagonalen die magische Summe ergeben. Man kann sie jedoch nicht so anordnen, dass Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen die magische Summe ergeben.

Beispiel:

1	4
2	3

In diesem Quadrat ergeben die Zeilen 5, die Spalten jedoch $\neq 5$.

a	b
c	d

Was auch noch eine Rolle spielt ist, dass gelten müsste: $s = a + b = a + c = a + d = b + c = b + d$

Das würde jedoch ergeben, dass a, b, c, d die selbe Zahl sein müsste was jedoch nicht der Definition eines reinen magischen Quadrates entspricht.

Es gibt deshalb kein reines magisches Quadrat der Ordnung $n = 2$.

2. Methoden zur Erzeugung magischer Quadrate

2.1 Für magische Quadrate ungerader Ordnung n am Beispiel $n = 3$

- Man bildet ein Quadrat mit durchlaufenden Zahlen von 1 bis 9, die durch 1 bis 3 und 0, 3, 6 dargestellt werden:

$1=0+1$	$4=3+1$	$7=6+1$
$2=0+2$	$5=3+2$	$8=6+2$
$3=0+3$	$6=3+3$	$9=6+3$

Die magische Konstante wird mit $1 + 2 + 3 + 0 + 3 + 6$ berechnet und lautet 15.

- Jetzt muss man zwei Hilfsquadrate erstellen, eins mit der Anordnung der 1-er (1, 2, 3) und eins mit der Anordnung der n -er (0, 3, 6).
- Bei dem 1-er Quadrat schreibt man die Zahl in die Hauptdiagonale von links oben nach rechtsunten, welche die Summe 6 ergibt ($1 + 2 + 3 = 6$).
Um auf die gesuchte Zahl zu kommen teilt man die Summe durch die Ordnung n des Quadrates, d.h. $6 / n = 6 / 3 = 2$.
Man beginnt also mit der 2 links oben und schreibt die darauf folgenden Zahlen, von klein nach groß, in die leeren Kästchen der Zeile (1, 3). In den nächsten Zeile rutscht jede Zahl jeweils einen Platz nach rechts.

2	1	3
3	2	1
1	3	2

Somit sind alle Zahlen auf Spalten, Zeilen und Hauptdiagonalen richtig verteilt.

- Das 2. Hilfsquadrat mit der Anordnung der n -er (0, 3, 6) hat die Summe 9 und somit muss die 3 auf der Hauptdiagonalen stehen, bei diesem Quadrat jedoch von rechts oben nach links unten. Die Zahlen 0 und 6 stehen der Größe nach von links nach rechts angeordnet in der 1. Zeile. In den nächsten Zeilen rutschen sie pro Zeile um einen Platz nach links.

0	6	3
6	3	0
3	0	6

- Wenn man beide Hilfsquadrate nun addiert erhält man ein reines magisches Quadrat der Ordnung $n = 3$.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

In diesem magischen Quadrat wieder holen sich keine Zahlen, das kann man daran sehen:

6
 1
 0 2 3 3

Wenn man jetzt die inneren Zahlen (1, 2, 3) drei mal im Uhrzeigersinn rotieren lässt erhält man alle Zahlenkombinationen, wie auch im magischen Quadrat.

- Mit diesen beiden Hilfsquadraten, die immer nach dem gleichen Schema konstruiert werden kann man von jeder ungeraden Ordnung n jeweils ein reines magisches Quadrat konstruieren.

2.2 Für magische Quadrate mit gerader Ordnung n

Bei magischen Quadraten gerader Ordnung n unterscheidet man zwischen n durch 4 teilbar, und n nur durch 2 teilbar.

2.2.1 Für n durch 4 teilbar am Beispiel $n = 12$

- Konstruktion des 1. Hilfsquadrates.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1									10	
		2							9		
			3					8			
				4			7				
					5	6					
					5	6					
				4			7				
			3					8			
		2							9		
	1									10	
0											11

Zwischen der 6. Und der 7. Zeile liegt die horizontale Mittelachse.

- Man füllt nun die leeren Felder mit Zahlenpaaren die zusammen 11 ergeben, d.h. in der 1. Spalte steht die 11 und die 0, in der 2. die 10 und die 1 usw.. Der Zahlenpartner eines Kästchens der 1. Spalte steht in der 12. Spalte, auch sie ergeben addiert 11. In jeder Spalte stehen $n/2$ der einen Zahl und $n/2$ der anderen Zahl. Man muss alle Zahlen symmetrisch zur horizontalen Mittelachse verteilen. Jetzt füllt man Spalte für Spalte mit den Zahlen auf und erhält nun sein vollständiges erstes Hilfsquadrat

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	2	8	7	6	5	4	3	9	10	11
11	10	9	3	7	6	5	4	8	2	1	0
11	10	9	8	4	6	5	7	3	2	1	0
11	10	9	8	7	5	6	4	3	2	1	0
11	10	9	8	7	5	6	4	3	2	1	0
11	10	9	8	4	6	5	7	3	2	1	0
11	10	9	3	7	6	5	4	8	2	1	0
0	1	2	8	7	6	5	4	3	9	10	11
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

- Um das 2.Hilfsquadrat zu konstruieren muss man zu jeder Zahl des 1.Hilfsquadrates 1 addieren.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12
12	11	10	4	8	7	6	5	9	3	2	1
12	11	10	9	5	7	6	8	4	3	2	1
12	11	10	9	8	6	7	5	4	3	2	1
12	11	10	9	8	6	7	5	4	3	2	1
12	11	10	9	5	7	6	8	4	3	2	1
12	11	10	4	8	7	6	5	9	3	2	1
1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

- Um das 3.Hilfsquadrat zu konstruieren muss man das 1.Hilfsquadrat um 90° im Uhrzeigersinn drehen, und es dann mit n (Beispiel: $n = 12, s = 870$) multiplizieren.

0	0	0	132	132	132	132	132	132	0	0	0
12	12	12	120	120	120	120	120	120	12	12	12
24	24	24	108	108	108	108	108	108	24	24	24
36	36	96	36	96	96	96	96	36	96	36	36
48	48	84	84	48	84	84	48	84	84	48	48
60	60	72	72	72	60	60	72	72	72	60	60
72	72	60	60	60	72	72	60	60	60	72	72
84	84	48	48	84	48	48	84	48	48	84	84
96	96	36	96	36	36	36	36	96	36	96	96
108	108	108	24	24	24	24	24	24	108	108	108
120	120	120	12	12	12	12	12	12	120	120	120
132	132	132	0	0	0	0	0	0	132	132	132

- Das reine magische Quadrat erhält man indem man Hilfsquadrat 2 und 3 addiert.

1	2	3	136	137	138	139	140	141	10	11	12
13	14	15	124	125	126	127	128	129	22	23	24
25	26	27	117	116	115	114	113	112	34	35	36
48	47	106	40	104	103	102	101	45	99	38	37
60	59	94	93	53	91	90	56	88	87	50	49
72	71	82	81	80	66	67	77	76	75	62	61
84	83	70	69	68	78	79	65	64	63	74	73
96	95	58	57	89	55	54	92	52	51	86	85
108	107	46	100	44	43	42	41	105	39	98	97
109	110	111	33	32	31	30	29	28	118	119	120
121	122	123	16	17	18	19	20	21	130	131	132
133	134	135	4	5	6	7	8	9	142	143	144

Dies ist ein reines magisches Quadrat, weil immer ein gleiches Paar aus dem 2.Hilfsquadrat mit einem komplementären Paar aus dem 3.Hilfsquadrat kombiniert wird, und somit nie die gleiche Zahl entstehen kann.

2.2.2 Für n nur durch 2 teilbar

Hierbei liegt der Unterschied darin, dass man bei magischen Quadraten der Ordnung $n = 14$, 7 Zahlen symmetrisch zu einer Achse verteilen müsste. Das ist jedoch nicht möglich, deshalb gibt es in jeder Spalte ein anormales Zahlenpaar welches sich direkt über der Hauptdiagonalen von links unten nach rechts oben, oder direkt unter der Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten befindet.

Ausnahme sind die Spalten in den sich die Hauptdiagonalen schneiden, in diesem Fall ist das anormale Paar in 1. bzw. in letzter Zeile zu finden.

Die restlichen Schritte sind jedoch die selben wie bei dem Fall n durch 4 teilbar.

Ein bestimmter Fall ist hierbei $n = 6$, in diesem Fall muss man im 1. Hilfsquadrat die Zahlen 4 und 1 in der ersten Zeile vertauschen, denn sonst stimmt die Aufteilung in Hilfsquadrat 1 und 2 nicht, und im magischen Quadrat wären dann zahlen doppelt.

Obwohl man anormale Paare in den Hilfsquadraten hat ist im letzten keine Zahl doppelt, was an der Verteilung der anormalen Paare liegt. Wenn man Hilfsquadrat 2 mit Hilfsquadrat 3 addiert dürfen keine anormalen Paare aufeinander treffen, was bei dieser Verteilung nicht der Fall ist.

Beispiel: Hilfsquadrat 1 mit $n = 14$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
0	12	2	10	9	8	6	7	5	4	3	11	1	13
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	12	11	10	4	8	7	6	5	9	3	2	1	0
13	12	11	10	4	5	7	6	8	9	3	2	1	0
13	12	11	10	9	8	6	7	5	4	3	2	1	0
13	12	11	10	9	5	6	7	8	4	3	2	1	0
13	12	11	10	9	5	7	6	8	4	3	2	1	0
13	12	11	3	4	8	7	6	5	9	10	2	1	0
0	1	11	3	9	8	7	6	5	4	10	2	12	13
0	1	2	10	9	8	6	7	5	4	3	11	12	13
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	2	3	4	5	7	6	8	9	10	11	12	13

Beispiel 1. Hilfsquadrat für $n = 6$

0	4	2	3	1	5
5	1	3	2	4	0
5	4	2	3	1	0
5	1	2	3	4	0
0	1	3	2	4	5
0	4	3	2	1	5

Für beide Beispiele kann man mit den Hilfsquadraten problemlos einreines magisches Quadrat finden.

3. Besondere magische Quadrate

Unter besonderen magischen Quadraten versteht man z.B. pandiagonale magische Quadrate, welche auch panmagische oder diabolische Quadrate genannt werden.

Das besondere an ihnen ist, dass nicht nur Spalten, Zeilen und Hauptdiagonale die magische Summe aufweisen, sondern auch die gebrochenen Diagonalen.

Wenn man ein pandiagonales Quadrat mehrfach aneinander und untereinander schreibt, ist jedes Quadrat der Größe $n * n$ wieder ein reines magisches Quadrat, welches auch wieder panmagisch ist.

Das Indische Quadrat z.B. ist panmagisches Quadrat:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Mehrfach untereinander / hintereinander:

7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4
7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4
7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4

So erkennt man besser die besonderen Eigenschaften dieses Pandiegonahlehn Quadrates.

Quellen:

Internet: www.tu-freiberg.de

www.lingen-ems.de

Lexikon

Mathebuch Walter Analysis